$C^{\infty}$ie

- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de vraagstukken.
- Elk vraagstuk is maximaal 10 punten waard.
- Begin elk vraagstuk op een nieuw vel.

# $\mu$KW
# 15 juni 2016

**Vraagstuk 1.**

**a** Met $\mathbb{N}$ bedoelen we de verzameling $\{1, 2, 3, ...\}$, en met $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bedoelen we de power-set van $\mathbb{N}$, de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Bepaal een aftelbaar oneindige deelverzameling $X \subset P(N)$ zodat de doorsnede van elk tweetal verschillende elementen $A, B \in X$ precies één element bevat, en de doorsnede van elk drietal verschillende elementen $A, B, C \in X$ leeg is. Hierij geldt dan $A \neq B, B \neq C$ en $C \neq A$. (4 pt.)

**b** Laat $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ voldoen aan de eigenschappen gegeven bij vraag 1a. Laat zien dat voor elke $A \in X$ geldt dat $A$ aftelbaar oneindig is. (3 pt.)

**c** Laat $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ voldoen aan de eigenschappen gegeven bij vraag 1a. Omdat $X$ aftelbaar oneindig is, kunnen we $X$ schrijven als $\{A_1, A_2, A_3, ...\}$. Definieer $B = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^c$. Bewijs dat, afhankelijk van de keuze van $X$, $B$ ieder natuurlijk getal als kardinaliteit kan hebben, en bovendien ook oneindig groot of zelfs leeg kan zijn. (3 pt.)

**Vraagstuk 2.**

Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue en begrensde functie zijn.

**a** Laat zien dat er voor iedere oneven $n \geq 1$ een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $f(c) = c^n$. (9 pt.)

**b** Bestaat er een even $n > 0$ zodat het bovenstaande voor iedere continue begrensde $f$ geldt? (1 pt.)

**Vraagstuk 3.**

Bekijk de getallenlijn met daarop de gehele getallen. In elk geheel getal bevindt zich een kabouter die begint aan een toevallige wandeling. Dit wil zeggen dat telkens alle kabouters tegelijkertijd onafhankelijk van elkaar een eerlijke munt opgooien en vervolgens elk een stap naar links zetten als de munt op kop valt en een stap naar rechts als de munt op munt valt. De muntworpen van de verschillende kabouters zijn onafhankelijk.

**a** Bewijs dat met kans 1 er op een gegeven moment 2 kabouters zijn die zich in hetzelfde punt bevinden. (2 pt.)

**b** Bewijs dat met kans 1 er op een gegeven moment 2016 kabouters zijn die zich in hetzelfde punt bevinden. (8 pt.)

**Vraagstuk 4.**

**a** Laat $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ drie vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn met norm 1. Toon aan dat

$$\min(||\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}||, ||\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}||, ||\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}||, ||-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}||) \leq 1.$$

(3 pt.)

**b** Toon aan dat voor dezelfde vectoren geldt dat:

$$\max(||\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}||, ||\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}||, ||\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}||, ||-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}||) \geq 2.$$

(7 pt.)